

## RADICIAÇÃO

Provavelmente até o 8º ano, você aluno só viu o conteúdo de radiciação envolvendo A RAIZ QUADRA.

Para relembrar:

$\sqrt{25} = 5$  para calcular a raiz quadrada de 25, devemos encontrar um número **que elevado a 2** seja 25, logo a raiz quadrada de 25 é **5**. Pois  $5^2$  é 25.,

$\sqrt{1} = 1$  para calcular a raiz quadrada de 1, devemos encontrar um número **que elevado a 2** seja 1, logo a raiz quadrada de 1 é **1**. Pois  $1^2$  é 1,

$\sqrt{0} = 0$  para calcular a raiz quadrada de 0, devemos encontrar um número **que elevado a 2** seja 0, logo a raiz quadrada de 0 é **0**. Pois  $0^2$  é 0,

$\sqrt{81} = 9$  para calcular a raiz quadrada de 81, devemos encontrar um número **que elevado a 2** seja 81, logo a raiz quadrada de 81 é **9**. Pois  $9^2$  é 81.

Viu também que não existe no conjunto dos números reais a  $\sqrt{-81}$ .

$\sqrt{-81}$  para calcular a raiz quadrada de - 81, devemos encontrar um número **que elevado a 2** seja - 81, **e não existe nenhum número que elevado a 2 seja negativo.**

Agora vamos estudar o que chamamos de RAIZ ENÉSIMA  $\sqrt[n]{?}$  neste caso a letra **n** representa o índice da raiz, por isso chamamos de enésima, até então provavelmente você só conhecia a RAIZ QUADRADA, ou seja raiz de índice 2.

A partir de agora estudaremos além das raízes de índice 2, as raízes de índices 3, 4, 5, ... para isso vamos dividir-las em dois grupos: Os de **índices ímpares** e os de **índices pares**.

### RAÍZES DE ÍNDICE IMPAR

$\sqrt[3]{8}$  para calcular a raiz cúbica de 8, devemos encontrar um número **que elevado a 3** seja 8, logo a raiz cúbica de 8 é **2**. Pois  $2^3$  é 8.

$\sqrt[3]{27}$  para calcular a raiz cúbica de 27, devemos encontrar um número **que elevado a 3** seja 27, logo a raiz cúbica de 27 é **3**. Pois  $3^3$  é 27.

$\sqrt[5]{1024}$  para calcular a raiz quinta de 1024, devemos encontrar um número **que elevado a 5** seja 1024, logo a raiz quinta de 1024 é **4**. Pois  $4^5$  é 1024.

LEMBRA QUE A RAIZ QUADRA DE UM NÚMERO NEGATIVO NÃO EXISTE NO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS.

**AGORA, QUANDO A RAIZ TEM ÍNDICE IMPAR EXISTE SIM A RAIZ DE UM NÚMERO NEGATIVO.**

$\sqrt[3]{-27}$  para calcular a raiz cúbica de - 27, devemos encontrar um número **que elevado a 3** seja - 27, logo a raiz cúbica de - 27 é - 3. Pois  $(-3)^3$  é - 27.

$\sqrt[5]{-32}$  para calcular a raiz quinta de - 32, devemos encontrar um número **que elevado a 5** seja - 32, logo a raiz quinta de - 32 é - 2. Pois  $(-2)^5$  é - 32.

### RAÍZES DE ÍNDICE PAR

$\sqrt{49}$  para calcular a raiz quadrada de 49, devemos encontrar um número **que elevado a 2** seja 49, logo a raiz quadrada de 49 é 7. Pois  $7^2$  é 49.

$\sqrt[4]{16}$  para calcular a raiz quarta de 16, devemos encontrar um número **que elevado a 4** seja 16, logo a raiz quarta de 16 é 2. Pois  $2^4$  é 16.

$\sqrt[6]{729}$  para calcular a raiz sexta de 729, devemos encontrar um número **que elevado a 6** seja 729, logo a raiz sexta de 729 é 3. Pois  $3^6$  é 729.

$\sqrt[6]{-64}$  **não existe no conjunto dos números reais, nenhuma raiz de índice par e radicando negativo.**

### **SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS**

A simplificação de radicais é tratada por vários autores através das **propriedades de radicais** e que eu vou tratar como **casos de simplificação** e não necessariamente na mesma ordem em que esteja no seu livro adotado pela escola.

#### CASO 1

Lembre-se, quando estudamos as frações também aprendemos a simplificá-las dividindo o numerador e o denominador por um mesmo número.

Para simplificar radicais agimos de forma parecida dividindo o **índice da raiz** e o **expoente do radicando** por um mesmo número.

- $\sqrt[6]{2^3}$  veja que o índice 6 e o expoente 3 são divisíveis por 3, então vamos simplificá-los por 3,  $\sqrt[6:3]{2^{3:3}}$  ficando então  $\sqrt[2]{2^1}$ , uma observação importante, não se coloca o índice 2 e nem o expoente 1, logo a maneira mais correta é  $\sqrt{2}$ .

- $\sqrt[15]{3^{20}}$  veja que o índice 15 e o expoente 20 são divisíveis por 5, então vamos simplificá-los por 5,  $\sqrt[15:5]{3^{20:5}}$  ficando então  $\sqrt[3]{3^4}$ .

Simplificar uma raiz é encontrar outra raiz equivalente. Podemos também encontrar uma **raiz equivalente de forma não simplificada**. Para isso devemos multiplicar o índice e o expoente do radicando por um mesmo número.

$\sqrt[3]{5^4}$  Eu posso encontrar uma fração equivalente não simplificada multiplicando o índice e o expoente do radicando por um número natural qualquer. Vou multiplicar por um 7,  $\sqrt[3 \cdot 7]{5^{4 \cdot 7}}$  fica então  $\sqrt[21]{5^{28}}$ .

Outra coisa importante na simplificação de radicais é a **FATORAÇÃO**.

$\sqrt[15]{8}$  Sempre que o radicando não for um número primo, devemos 1º fatorar pra depois simplificar. (se tiver dificuldade em fatorar der uma olhada no conteúdo de fatoração.), fatorando o 8 temos  $2^3$  assim temos  $\sqrt[15]{2^3}$  podemos simplificar o índice e o expoente por 3, ficando  $\sqrt[15:3]{2^{3:3}} = \sqrt[5]{2}$ .

## **CASO 2**

Radicais que o índice é igual ao expoente do radicando é igual ao próprio radicando.

$\sqrt[5]{2^5} = 2$  É como se eu estivesse simplificando o índice e o expoente por 5, o índice ficaria 1 o que faz com que o radical deixe de existir, pois não existe radical de índice 1, o expoente do radicando também ficaria 1 e já vimos que expoente 1 não precisa colocar.

$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$  primeiro fatoramos o 125 que é  $5^3$  ficando então  $\sqrt[3]{5^3}$  como o expoente é igual ao índice o resultado é o radicando 5.

## **CASO 3**

Raiz de uma outra raiz, neste caso mantemos o radicando e multiplicamos os índices das raízes.

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$  basta multiplicar os índices 3 e 4 ficando então,  $\sqrt[12]{5}$

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{7}}}$  basta multiplicar os índices 3, 4 e 5 ficando então,  $\sqrt[60]{7}$

${}^{2x}\sqrt{{}^3\sqrt{5}}$  basta multiplicar os índices  $2x$  e  $3$  ficando então,  ${}^{6x}\sqrt{5}$

OBS: Não podemos aplicar a propriedade em  ${}^3\sqrt{2^5\sqrt{7}}$  porque tem o 2 entre os radicais, após o conteúdo de introdução de fator externo no radical, aí sim poderemos aplicar a propriedade.

#### **CASO 4**

Quando temos uma multiplicação ou divisão dentro do radical.

$\sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$  Veja, a raiz de 3 vezes 7 é a mesma coisa de raiz quadrada de 3 vezes a raiz quadrada de 7.

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$$

$$\sqrt{36} = 2 \cdot 3 \quad \text{Está vendo, tanto faz multiplicar 4 vezes 9 e tirar a raiz como tirar a } 6 = 6$$

raiz separadamente e depois multiplicar.

O mesmo princípio vale para a divisão, veja:

$$\sqrt{6:3} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \quad \text{Veja que vira uma divisão e cada termo com seu radical.}$$

$$\sqrt{81:9} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}$$

$$\sqrt{9} = \frac{9}{3}$$

Veja agora, tanto faz dividir 81 por 9 e extrair a raiz como extrair a

$$3 = 3$$

raiz de cada um separadamente e depois resolver a fração se possível.

#### **Veja como não funciona quando for adição ou subtração**

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$$

$$\sqrt{25} = 4 + 3$$

Veja como fica diferente 5 NÃO É IGUAL A 7, por isso a

$$5 = 7$$

propriedade não funciona pra adição e nem pra subtração.

## SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS ATRAVÉS DA FATORAÇÃO

Para simplificar radicais, você precisa lembrar como fatorar um número em fatores primos.

600		2	
300		2	
150		2	
75		3	
25		5	
5		5	
1			$= 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

1° - Para fatorar você deve lembrar da sequência de números primos (é aquele número que só pode ser dividido por 1 e por ele mesmo) veja alguns: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

2° - Obedeça a ordem dos números primos, primeiro o 2, depois o 3 e assim até o final, enquanto for possível dividir por um mesmo número continue.

Veja que na fatoração do 600, o fator 2 aparece três vezes por isso fica elevado a 3, da mesma forma é o 5 parece duas vezes, por isso fica elevado a 2.

**IMPORTANTE:** na simplificação utilizamos com frequência o CASO 2, Radicais que o índice é igual ao expoente do radicando é igual ao próprio radicando.

Outra coisa importante é saber que:

$$2^5 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \text{ ou } 2^5 = 2^3 \cdot 2^2$$

✓  $\sqrt{600} = \sqrt{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2}$  vamos fazer  $2^3 = 2^2 \cdot 2$  ficando  $\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5^2}$  aplicando a propriedade de radicais em que o expoente é igual ao índice, tiramos do radical o 2 e o 5 que estão elevado a 2, ficando então  $2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3} = 10\sqrt{6}$ .

✓ Outro exemplo,  $\sqrt{90}$  fatorando o 90 temos  $\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5}$ , como o 3 tem expoente igual ao índice ele sai do radical ficando  $3\sqrt{2 \cdot 5}$ .

✓ Outro exemplo,  $\sqrt[3]{2160}$  fatorando o 2160 temos  $\sqrt[3]{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5}$  veja que o 2 tem expoente 4, portanto maior do que o índice, assim devemos escrevê-lo novamente como  $2^3 \cdot 2$ , veja  $\sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 5}$  agora tiramos do radical os fatores que tem expoente 3 ficando  $2 \cdot 3 \sqrt[3]{2 \cdot 5}$  multiplicamos então 2.3 fora do radical e 2,5 dentro do radical assim teremos  $6\sqrt[3]{10}$ .

➤ Esse processo de simplificação pode também envolver variáveis veja este exemplo  $\sqrt[3]{16a^3b^5}$  fatorando o 16 que dar  $2^4$  e o  $b^5$  temos  $\sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot b^2}$  tiramos do radical os termos que estão elevado a 3 assim temos  $2ab^3\sqrt[3]{2 \cdot b^2}$ .

✓ Outro exemplo com fração  $\sqrt[3]{\frac{16x^5}{243y^4}}$  fatorando cada termo temos  $\sqrt[3]{\frac{2^4 x^5}{3^4 y^4}}$  colocando os fatores com expoente igual ao índice temos  $\sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x^2}{3^3 \cdot 3 \cdot y^3 \cdot y}}$  na hora de tirar o fator do radical tiramos quem está no numerador e colocamos no numerador, e aquela que tiramos do denominador colocamos no denominador, veja  $\frac{2x}{3y} \sqrt[3]{\frac{2 \cdot x^2}{3 \cdot y}}$  se a fração que está fora for possível simplificar simplifica.

### INTRODUÇÃO DE UM FATOR EXTERNO NO RADICAL

Nos exemplos anteriores, simplificamos os radicais tirando de dentro dos radicais os fatores que tem expoente igual ao índice.

Veja:  $\sqrt{600} = 2 \cdot 5 \sqrt{2 \cdot 3}$  tiramos o 2 e 5 de dentro do radical, INTRODUIZIR O FATOR EXTERNO NO RADICAL é colocar de volta o 2 e 5 dentro do radical. Eu gosto de dizer que é a propriedade do arrependimento, tirei e agora vou colocar de volta.

Lembra que o 2 e o 5 saiu do radical porque tinha expoente igual ao índice da raiz, ou seja, expoente 2, para colocá-los de volta é só devolver o expoente deles dentro do radical.  $\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5^2}$  Viu como é fácil, resolvemos as potências  $\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 25}$  e multiplicando todos os fatores temos  $\sqrt{600}$ .

Vamos introduzir os fatores externos de alguns radicais:

Ex:  $2 \cdot 3 \sqrt[3]{5}$  Como o índice da raiz é 3, vamos introduzir os fatores 2 e 3 com o expoente 3, ficando assim  $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5}$  resolvendo as potências temos  $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 5}$  multiplicando todos os fatores temos  $\sqrt[3]{1080}$ .

Ex:  $2a^2 b \sqrt[3]{3ab}$  Veja que para introduzir cada fator externo no radical ele ganha o expoente 3, assim o 2 entra como  $2^3$ , o  $a^2$  entra como  $(a^2)^3$  virando aqui uma potência de potência que resolvendo fica  $a^6$  ( na prática é só introduzir o a e multiplicar o seu expoente pelo índice ) e o b entra como  $b^3$ . ficando assim  $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3 \cdot a \cdot a^6 \cdot b \cdot b^3}$  vamos resolver a potência  $2^3$  e  $a \cdot a^6 = a^7$  ( assunto de potência, conserva a base e soma os

expoentes ), fazemos o mesmo com  $b \cdot b^3 = b^4$  . assim temos  $\sqrt[3]{8 \cdot 3 \cdot a^7 \cdot b^4}$  agora é só multiplicar 8.3 e pronto  $\sqrt[3]{24a^7b^4}$  .

Ex:  $\frac{2x}{y} \sqrt[5]{3}$  para se introduzir o fator externo fracionário introduzimos o 2x que está no numerador colocando no numerador e o y do denominador colocando no denominador, veja  $\sqrt[5]{\frac{2^5 \cdot x^5 \cdot 3}{y^5}}$  resolve  $2^5$  que é 32 e multiplica por 3, ficando  $\sqrt[5]{\frac{96x^5}{y^5}}$  .

## ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE RADICAIS

Para somarmos ou subtrairmos dois ou mais radicais, devemos observar se os **radicais são semelhantes ( iguais )**, e quando é que os radicais são semelhantes?

Para serem semelhantes os radicais **devem ter o mesmo índice e mesmo radicando**, veja alguns exemplos de radicais semelhantes:

- ✓  $5\sqrt{2}$  e  $-3\sqrt{2}$  veja que os radicais são iguais.
- ✓  $2\sqrt[3]{3}$  ,  $3\sqrt[3]{3}$  e  $-8\sqrt[3]{3}$  veja que os radicais também são iguais.

Agora que você sabe quando os radicais são semelhantes vamos ver como devemos fazer pra somar ou subtrair tais radicais.

Observe que antes de cada radical tem um número e quando não tem é porque é um, esse número que fica antes do radical é chamado de coeficiente do radical, nos exemplo de radicais semelhantes acima, os coeficientes da  $\sqrt{2}$  são 5 e -3 e os coeficientes da  $\sqrt[3]{3}$  são o 2, 3 e - 8 .

Para somarmos ou subtrairmos os radicais, devemos efetuar tais operações apenas com os coeficientes e conservar o radical. E para isso você vai utilizar as regras de operações dos números inteiros ( Mesmo sinal agente soma e conserva o mesmo sinal e sinal diferente agente subtrai e conserva o sinal do número de maior valor absoluto. ).

Ex:  $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$  pegando apenas os coeficientes e conservando o radical temos  $(2+3+4)\sqrt{5}$  dentro do parêntese todos os coeficientes tem o mesmo sinal, então soma e conserva o mesmo sinal que dar 9, ficando  $9\sqrt{5}$  .

Ex:  $-2\sqrt[3]{7} + 9\sqrt[3]{7}$  pegando apenas os coeficientes e conservando o radical temos  $(-2+9)\sqrt[3]{7}$  dentro do parêntese os coeficientes tem sinal diferente, subtraímos e conservamos o sinal do maior, ficando  $7\sqrt[3]{7}$  .

Ex:  $-2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$  pegando apenas os coeficientes e conservando o radical temos  $(-2-5)\sqrt{3}$  dentro do parêntese todos os coeficientes tem o mesmo sinal, então soma e conserva o mesmo sinal, ficando  $-7\sqrt{3}$ .

OBS: Não é obrigatório colocar os coeficientes dentro do parêntese você pode fazer o cálculo mentalmente e colocar apenas o resultado.

Ex:  $-\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$  pegando apenas os coeficientes e conservando o radical temos  $\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{3}$  agora dentro do parente temos uma adição de fração com denominadores diferentes, você deve tirar o mmc dos denominadores, veja como se faz no conteúdo de operações com frações,  $\left(\frac{-4+3}{6}\right)\sqrt{3}$  ficando então  $-\frac{1}{6}\sqrt{3}$ .

Ex:  $2\sqrt{3} - 5\sqrt[3]{2} - 7\sqrt{3} + 8\sqrt[3]{2}$  veja que temos raízes diferentes, só podemos efetuar a operação com radicais semelhantes,  $\sqrt{3}$  com  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt[3]{2}$  com  $\sqrt[3]{2}$  ficando assim  $(2-7)\sqrt{3}$  e  $(-5+8)\sqrt[3]{2}$  resolvendo os parênteses temos  $-5\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{2}$ .

Ex:  $\sqrt{108} + \sqrt{432} - \sqrt{12}$  veja que neste exemplo os radicais não são semelhantes, pelo menos aparentemente, devemos então simplificar cada radical através da fatoração e colocar os fatores com expoente igual ou menor que o índice da raiz que é 2, veja como fica após a fatoração  $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 3}$  extraíndo do radical cada fator que tem expoente igual ao índice temos  $2 \cdot 3\sqrt{3} + 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$  os números que saíram do radical ficam fazendo multiplicação e resolvendo essas multiplicações temos  $6\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ , agora sim todos os radicais são semelhantes é só fazer  $6+12-2$  e conservar o radical resultado  $16\sqrt{3}$ . Então sempre que os radicais não estiverem semelhantes é só simplificar e ver se realmente são semelhantes.

Ex:  $\sqrt[3]{\frac{16}{81}} - \sqrt[3]{\frac{2}{24}}$  quando envolver frações fatoramos normalmente os numeradores e os denominadores  $\sqrt[3]{\frac{2^4}{3^4}} - \sqrt[3]{\frac{2}{2^3 \cdot 3}}$  colocando cada expoente igual ou menor ao índice temos  $\sqrt[3]{\frac{2^3 \cdot 2}{3^3 \cdot 3}} - \sqrt[3]{\frac{2}{2^3 \cdot 3}}$  agora vamos extrair do radical os termos que tem expoente igual ao índice, ATENÇÃO veja que no segundo radical não vai sair nenhum termo do numerador só vai sair o 2 no denominador como não existe fração sem numerador esse numerador vai ser 1. Veja  $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$  resolvendo  $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$  temos então uma subtração de fração com denominadores diferentes, veja como resolver nas operações

com frações, primeiro passo é tirar o mmc ficando assim  $\left(\frac{4-3}{6}\right)\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$  e resolvendo o

numerador fica  $\frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ .

## **MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE RADICAIS**

Só podemos multiplicar ou dividir radicais se eles tiverem o mesmo índice, neste caso vamos multiplicar ou dividir coeficiente com coeficiente e radicando com radicando.

OBS: Como estamos tratando de multiplicação e divisão, devemos fazer jogo de sinal.

Ex:  $2\sqrt[3]{3} \cdot 5\sqrt[3]{4}$  como as raízes têm o mesmo índice, multiplicamos  $2 \times 5$  e  $3 \times 4$  ficando  $10\sqrt[3]{12}$ .

Ex:  $-2\sqrt{3} \cdot (-5)\sqrt{2}$  multiplicamos  $(-2) \cdot (-5)$  e  $3 \cdot 2$  ficando  $10\sqrt{6}$ .

Ex:  $\frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{5}$  observe que os radicais tem o mesmo índice, vamos

multiplicar os coeficientes entre si e os radicandos entre si assim  $\left(\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{4}\right)\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$  para multiplicar as frações multiplicamos numerador com numerador e denominador com denominador e fazemos o jogo de sinal assim temos  $-\frac{6}{36}\sqrt{30}$  veja que a fração dar para simplificar então é obrigado simplificar ficando então  $-\frac{1}{6}\sqrt{30}$ .

Ex:  $(2a^2\sqrt{3a^3b}) \cdot (3a^3\sqrt{2a^2b^2})$  envolvendo variáveis, o processo é o mesmo, o que você precisa lembrar é que na multiplicação de mesma base agente conserva a base e soma os expoentes  $a^2 \cdot a^3 = a^5$  o mesmo com  $b \cdot b^2 = b^3$  assim temos  $6a^5\sqrt{6a^5b^3}$  dependendo do caso pode ser necessário simplificar esse radical já que a e b tem expoente maior que o índice.

PARA DIVIDIR O PROCESSO É O MESMO os radicais devem ter o mesmo índice e agente divide coeficiente com coeficiente e radicando com radicando.

Ex:  $25\sqrt{6} : 5\sqrt{2}$  é só dividir 25 por 5 e 6 por 2 ficando  $5\sqrt{3}$

Ex:  $\frac{2}{3}\sqrt{10} : \frac{2}{5}\sqrt{2}$  vamos ter então  $\left(\frac{2}{3} : \frac{2}{5}\right)\sqrt{10:2}$  para dividir fração, conservamos a primeira e multiplicamos pelo inverso da segunda assim  $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}\right)\sqrt{10:2}$  agora multiplicamos numerador com numerador e denominador com denominador  $\frac{10}{6}\sqrt{5}$  temos que simplificar a fração  $\frac{5}{3}\sqrt{5}$ .

Ex:  $(12a^5\sqrt{30a^7b^4}) : (3a^3\sqrt{2a^2b^2})$  envolvendo variáveis, o processo é o mesmo, o que você precisa lembrar é que na divisão de mesma base agente conserva a base e subtrai os expoentes  $a^5 : a^3 = a^2$  e  $a^7 : a^2 = a^5$  o mesmo com  $b^4 : b^2 = b^2$  assim temos  $4a^2\sqrt{15a^5b^2}$  dependendo do caso pode ser necessário simplificar esse radical já que a e b tem expoente maior ou igual ao índice.

### **POTENCIAÇÃO NOS RADICAIS**

A princípio aplicaremos aqui a regra básica da potenciação. O expoente indica quantas vezes a base será multiplicada por ela mesma.

Ex:  $(\sqrt{2})^3$  a base vai ser multiplicada por ela mesma três vezes  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$  efetua a multiplicação de radicais ficando  $\sqrt{8}$  é um radical que pode ser simplificado fatorando temos  $\sqrt{2^3}$  colocando o expoente igual ou menor que o índice temos  $\sqrt{2^2 \cdot 2}$  sai o 2 e fica  $2\sqrt{2}$ .

ATENÇÃO: De forma prática o expoente passa a ser expoente do radicando assim temos que  $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3}$  depois é só simplificar o radical.

Ex:  $(-2\sqrt{3})^3$  pela regra de potência temos  $(-2\sqrt{3})(-2\sqrt{3})(-2\sqrt{3})$  multiplicando os radicais temos  $(-8\sqrt{3^3})$  devemos então simplificar  $(-8\sqrt{3^2 \cdot 3})$  o 3 que tem expoente 2 sai e multiplica o - 8 ficando então  $-24\sqrt{3}$ .

Ex:  $(2a^3\sqrt{b^3})^2$  este exemplo vamos fazer de maneira prática resolvemos 2 elevado a 2 que é 4,  $(a^3)^2$  se torna uma potência de potência conserva a base e multiplica os expoentes fazemos o mesmo com o b, ficando então  $4a^6\sqrt{b^6}$ .

Ex:  $\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3$  na prática é só resolver  $\left(\frac{1}{3}\right)^3$  e  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$  ficando  $\frac{1}{9}\sqrt{\frac{1}{8}}$  veja que o radical dar pra simplificar primeiro passo é fatorar o 8, assim temos  $\frac{1}{9}\sqrt{\frac{1}{2^3}}$  desmembrando o expoente 3 temos  $\frac{1}{9}\sqrt{\frac{1}{2^2 \cdot 2}}$  o 2 que tem expoente igual ao índice que está no denominador sai e multiplica o 9, ficando então  $\frac{1}{18}\sqrt{\frac{1}{2}}$ .

## RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

A racionalização de denominadores se fará necessária quando uma fração tiver em seu denominador uma raiz qualquer estando ela de forma irredutível ou seja de forma simplificada. Veja alguns exemplos:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \text{ e } \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$$

A racionalização é transformar esse denominador em um número racional, ou seja, escrever uma fração equivalente sem a raiz no denominador.

Para isso é necessário que você conheça o FATOR RACIONALIZANTE é um termo que será usado pra racionalizar a raiz. São três tipos de fator racionalizante:

### 1° FATOR RACIONALIZANTE DE UMA RAIZ QUADRA QUALQUER

O fator racionalizante de uma raiz quadra é outra raiz quadra idêntica.

Ex:  $\sqrt{2}$  fator racionalizante é  $\sqrt{2}$

Ex:  $\sqrt{5}$  fator racionalizante é  $\sqrt{5}$

Ex:  $5\sqrt{3}$  fator racionalizante é  $\sqrt{3}$

### 2° FATOR RACIONALIZANTE DE UMA RAIZ COM ÍNDICE DIFERENTE DE 2

O fator racionalizante é uma raiz de mesmo índice, mesmo radicando mas o expoente do radicando é obtido fazendo a subtração do índice pelo expoente do radicando.

Ex:  $\sqrt[5]{2^3}$  fator racionalizante é outra raiz quinta de 2 elevado a  $5 - 3$ , assim  $\sqrt[5]{2^2}$

Ex:  $2\sqrt[7]{3^2}$  fator racionalizante é outra raiz sétima de 3 elevado a  $7 - 2$ , assim  $\sqrt[7]{3^5}$

### 3º FATOR RACIONALIZANTE DE UMA SOMA OU UMA SUBTRAÇÃO

Esse fator racionalizante é quando temos no denominador uma soma ou uma subtração e que um dos termos seja uma raiz. Neste caso o fator racionalizante é só trocar o sinal.

Ex:  $2 + \sqrt{3}$  o fator racionalizante de uma soma é uma subtração  $2 - \sqrt{3}$

Ex:  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$  o fator racionalizante de um subtração é um soma  $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

Ex:  $3\sqrt{7} + \sqrt{3}$  o fator racionalizante é  $3\sqrt{7} - \sqrt{3}$

Agora que conhecemos os fatores racionalizantes podemos racionalizar uma fração, para isso vamos multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo fator racionalizante, assim agente vai ter uma nova fração de mesmo valor porém escrita de forma diferente, sem raiz no denominador.

Ex: Racionalizar a fração  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Vamos pegar a fração e multiplicar pelo fator racionalizante que é  $\sqrt{3}$

$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$  como se trata de multiplicação de fração multiplicamos numerador com

numerador e denominador com denominador, assim temos  $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$  devemos resolver a raiz

quadrada de nove, ficando então  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

Ex: Racionalizar a fração  $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Vamos pegar a fração e multiplicar pelo fator racionalizante que é  $\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$  fazemos a multiplicação de fração e temos  $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{4}}$  resolvemos a raiz de 4

ficando  $\frac{\sqrt{6}}{2 \cdot 2}$  multiplicamos 2 vezes 2 e o resultado final é  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ .

Ex: Racionalizar a fração  $\frac{2}{\sqrt[5]{2^3}}$

Vamos pegar a fração e multiplicar pelo fator racionalizante que é  $\sqrt[5]{2^2}$

$\frac{2}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}$  faz a multiplicação de fração e lembre-se que  $2^3 \cdot 2^2$  conserva a base e

soma os expoentes ficando assim  $\frac{2\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}}$  no denominador temos expoente 5 e índice 5

portanto sai o 2 do radical ficando  $\frac{2\sqrt[5]{2^2}}{2}$  simplificando a fração temos  $\sqrt[5]{2^2}$ .

Ex: Racionalizar a fração  $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

Vamos pegar a fração e multiplicar pelo fator racionalizante que é  $\sqrt{5} - \sqrt{2}$

$\frac{2}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})}$  veja que no denominador temos um produto notável que é o produto da soma pela diferença resolvemos através da regra  $(1^\circ \text{ termo})^2 - (2^\circ \text{ termo})^2$  o

$1^\circ$  termo é  $\sqrt{5}$  e o  $2^\circ$  termo é  $\sqrt{2}$ , fica assim  $\frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}$  no denominador expoente

2 e índice 2 elimina os radicais  $\frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2}$  resultado final, não é necessário fazer a

multiplicação do numerador, assim temos  $\frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3}$  se desse pra simplificar 2 sobre 3 teria que simplificar.

Ex: Racionalizar a fração  $\frac{2}{3 - \sqrt{5}}$

Vamos pegar a fração e multiplicar pelo fator racionalizante que é  $3 + \sqrt{5}$

$\frac{2}{(3 - \sqrt{5})} \cdot \frac{(3 + \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})}$  fazendo o produto da soma pela diferença no denominador temos

$\frac{2(3 + \sqrt{5})}{3^2 - (\sqrt{5})^2}$  resolvendo as potências do denominador temos  $\frac{2(3 + \sqrt{5})}{9 - 5}$  resolve a

operação do denominador  $\frac{2(3+\sqrt{5})}{4}$  veja que dar pra simplificar a fração  $\frac{2}{4}$  ficando

$\frac{1(3+\sqrt{5})}{2}$  multiplicando 1 por  $(3+\sqrt{5})$  temos  $\frac{(3+\sqrt{5})}{2}$ .

Ex: Racionalizar a fração  $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

Vamos pegar a fração e multiplicar pelo fator racionalizante que é  $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

$\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \cdot \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$  veja que no numerador tem uma multiplicação de mesma

base, conserva a base e soma os expoentes ficando assim  $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$  agora o

numerador também tem um produto notável **que é um quadrado da soma** que também tem sua regra de resolução  $(1^\circ \text{ termo})^2 + 2 \cdot (1^\circ \text{ termo}) \cdot (2^\circ \text{ termo}) + (2^\circ \text{ termo})^2$

aplicando as regras de produtos notáveis temos  $\frac{(\sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{5})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}$  todas as

potências tem expoentes iguais aos índices isso elimina os radicais, veja

$\frac{5 + 2(\sqrt{5})(\sqrt{3}) + 3}{5 - 3}$  vamos resolver a multiplicação do numerador  $\frac{5 + 2\sqrt{15} + 3}{5 - 3}$  agora

resolvemos no numerador  $5+3$  e no denominador  $5-3$  ficando  $\frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}$  isso é o mesmo

que  $\frac{8}{2} + \frac{2\sqrt{15}}{2}$  simplificando cada fração temos  $4 + \sqrt{15}$ .